



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



ONM, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026

Clasa a XII-a

○ Timp de lucru: 180 de minute. ○ Din oficiu se acordă 10 puncte.

Problema 1. (22 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește operația " \circ " prin $x \circ y = x + y + xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

și se notează $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ de } x}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Determinați numerele reale x pentru care $x_n = x$, unde $n \geq 2$ este un număr natural fixat.

Problema 2. (22 de puncte)

(a) Se consideră un grup multiplicativ (G, \cdot) în care este adevărată implicația:

Dacă $x, y, z \in G$ verifică egalitatea $xy^{2026} = z^{2026}x$, atunci $y = z$. Demonstrați că grupul este abelian.

(b) Arătați că dacă (G, \cdot) este un grup multiplicativ și $a \in G$ este un element fixat, atunci funcția

$f: G \rightarrow G$, $f(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ este un automorfism al grupului G .

Problema 3. (23 de puncte)

Dacă F este o primitivă a funcției $f: (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ cu $F(0) = 0$, calculați $F(2)$.

Problema 4 (23 de puncte)

(a) Arătați că dacă $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcții $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $G(0) = 0$, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $G(c) = (1-c) \cdot g(c)$.

(b) Se consideră funcția $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x}{1+x+e^x}$. Determinați cel mai mic număr natural

nenul k pentru care $H(1) < \ln \frac{ke}{k+e}$, știind că H este o primitivă a funcției h cu $H(0) = 0$.

(Supliment GM 9 și 10/2025)

Subiecte selectate de prof. Ovidiu Bădescu